

2019年天津河东区高三一模文科数学试卷

一、选择题（本大题共8题，每小题3分，共计24分）

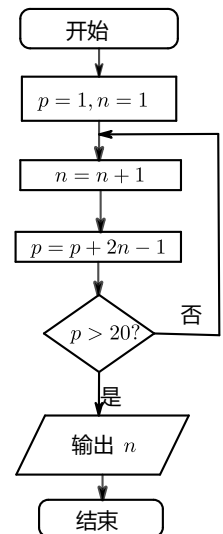
1. 已知 i 是虚数单位， $x \in \mathbf{R}$ ，复数 $z = (x + i)(2 + i)$ 为纯虚数，则 $2x - i$ 的模等于（ ）.

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

2. 已知 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y - 3 \geq 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$ ，则 $z = x + 3y$ 的最小值等于（ ）.

- A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

3. 若某程序框图如图所示，则输出的 n 的值是（ ）.



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

4. 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $1 < x < 2$ ”是“ $|x - 2| < 1$ ”的（ ）.

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上递减，试比 $a = f(1)$ ， $b = f\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}\right)$ ， $c = f\left(\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 大小

- ().
A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $b > a > c$ D. $c > a > b$

6. 为了得到函数 $y = 3 \cos 2x$ 图象，只需把函数 $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 图象上所有点（ ）.

- A. 向右平行移动 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度 B. 向右平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度
C. 向左平行移动 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度 D. 向左平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

7. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，过点 F_2 与双曲线的一条渐近线平行的直线交双曲线另一条渐近线于点 M ，若点 M 在以线段 F_1F_2 为直径的圆外，则双曲线离心率的取值范围是 () .
- A. $(1, \sqrt{2})$ B. $(\sqrt{3}, +\infty)$ C. $(\sqrt{3}, 2)$ D. $(2, +\infty)$

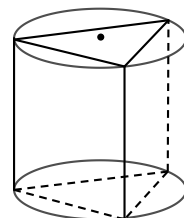
8. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = 2f(x)$ ，当 $x \in [0, 2)$ 时， $\begin{cases} x^2 - x, & x \in [0, 1) \\ -(\frac{1}{2})^{|x-\frac{3}{2}|}, & x \in [1, 2) \end{cases}$ ，若当 $x \in [-4, -2)$ 时，不等式 $f(x) \geq \frac{t^2}{4} - t + \frac{1}{2}$ 恒成立，则实数 t 的取值范围是 () .
- A. $[2, 3]$ B. $[1, 3]$ C. $[1, 4]$ D. $[2, 4]$

二、填空题 (本大题共6题，每小题3分，共计18分)

9. 集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ， $B = \{x | x^2 - 2x \leq 0\}$ ，则 $A \cap B = \underline{\hspace{2cm}}$.

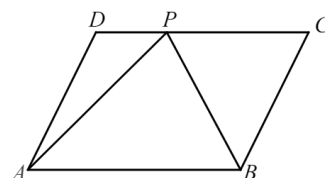
10. 已知函数 $f(x)$ 的导函数，满足 $f(x) = 2xf'(1) + x^3$ ，则 $f'(1)$ 等于 .

11. 如图，圆柱内有一个直三棱柱，三棱柱的底面在圆柱底面内，且底面是正三角形. 如果三棱柱的体积为 $12\sqrt{3}$ ，圆柱的底面直径与母线长相等，则圆柱的侧面积为 .



12. 已知直线 $y = mx$ 与圆 $C: (x-m)^2 + (y-1)^2 = m^2 - 1$ 交于 A, B 两点， $\angle ACB = 60^\circ$ ，则圆的面积为 .

13. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB = 8$ ， $AD = 5$ ， $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PD}$ ， $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 2$ ，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ 的值是 .



14. 若实数 x, y 满足 $2\cos^2(x+y-1) = \frac{(x+1)^2 + (y-1)^2 - 2xy}{x-y+1}$ ，则 xy 的最小值为 .

三、解答题（本大题共6题，共计58分）

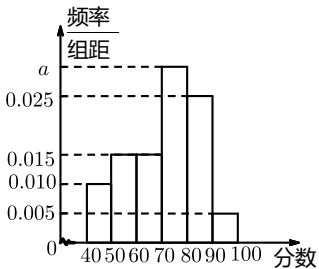
15. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ， $f(x) = 2\sin(x - A)\cos x + \sin(B + C)(x \in \mathbf{R})$ ，函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称.
- (1) 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时，求 $f(x)$ 的值域.
- (2) 若 $a = 7$ 且 $\sin B + \sin C = \frac{13\sqrt{3}}{14}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 某校从高一年级学生中随机抽取40名学生，将他们的期中考试数学成绩（满分100分，成绩均为不低于40的整数）分成六段：[40, 50)，[50, 60)，
...，[90, 100]后得到如图的频率分布直方图.

爱智康

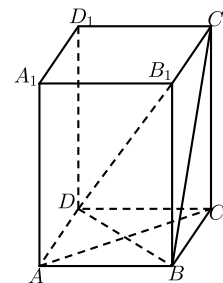
爱智康

爱智康



- (1) 求图中实数 a 的值.
- (2) 若该校高一年级共有学生640人，试估计该校高一年级期中考试数学成绩不低于60分的人数.
- (3) 若从数学成绩在[40, 50)与[90, 100]两个分数段内的学生中随机选取两名学生，
- 1 列出所有可能的结果.
 - 2 求这两名学生的数学成绩之差的绝对值不大于10的概率.

17. 如图, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 为正方形, $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$.



- (1) 求证: $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 ;
- (2) 若二面角 $C_1 - BD - C$ 的大小为 60° , 求异面直线 BC_1 与 AC 所成角的余弦值.

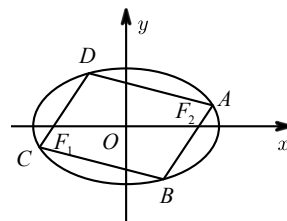
18. 在等差数列中 $\{a_n\}$, 已知公差 $d = 2$, a_2 是 a_1 与 a_4 的等比中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足: $a_n = \frac{b_1}{3+1} + \frac{b_2}{3^2+1} + \frac{b_3}{3^3+1} + \cdots + \frac{b_n}{3^n+1}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(3) 令 $c_n = \frac{a_n b_n}{4} (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴的一个顶点与两个焦点构成正三角形，且该三角形的面积为 $\sqrt{3}$.



(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 设 F_1, F_2 是椭圆 C 的左右焦点，若椭圆 C 的一个内接平行四边形的一组对边过点 F_1 和 F_2 ，求这个平行四边形的面积最大值.

20. 已知 $f(x) = mx - a \ln x - m$, $g(x) = \frac{ex}{e^x}$, 其中 m, a 均为实数.

(1) 求 $g(x)$ 的极值.

(2) 设 $m = 1, a = 0$, 求证对 $\forall x_1, x_2 \in [3, 4]$ ($x_1 \neq x_2$) , $|f(x_2) - f(x_1)| < \left| \frac{ex_2}{g(x_2)} - \frac{ex_1}{g(x_1)} \right|$ 恒成立.

(3) 设 $a = 2$, 若对 $\forall$ 给定的 $x_0 \in (0, e]$, 在区间 $(0, e]$ 上总存在 t_1, t_2 ($t_1 \neq t_2$) 使得 $f(t_1) = f(t_2) = g(x_0)$ 成立, 求 m 的取值范围.